Universidade Federal de Santa Catarina **DAS / PPGEAS**
Fundamentos de Matemática Discreta para Controle e Automação
Professor: Jomi F. Hübner

Lista de exercícios: **Lógica Proposicional**

1. Traduza para a linguagem natural as fórmulas abaixo, utilizando o seguinte esquema:
   - $P \equiv$ o livro é interessante.
   - $Q \equiv$ o livro é caro.
   - $R \equiv$ o livro é de lógica.

   a) $\neg P$
   b) $P \wedge Q$
   c) $P \wedge \neg Q$
   d) $\neg P \wedge Q$
   e) $\neg(P \wedge Q)$
   f) $P \rightarrow Q$
   g) $P \leftrightarrow (\neg Q \vee R)$

2. Escreva fórmulas para as sentenças abaixo utilizando os seguintes símbolos proposicionais:
   - $P \equiv$ Paula vai à festa.
   - $Q \equiv$ Quincas vai à festa.
   - $R \equiv$ Ricardo vai à festa.
   - $S \equiv$ Sara vai à festa.

   a) Paula não vai.
   b) Paula vai, mas Quincas não vai.
   c) Se Paula for, então Quincas também irá.
   d) Paula irá, se Quincas for.
   e) Paula irá, somente se Quincas for.
   f) Paula irá se e somente se Quincas for.
   g) Nem Paula nem Quincas irão.
   h) Paula e Quincas não irão.
   i) Paula vai ou Quincas não vai.
   j) Paula não irá, se Quincas for.
   k) Ou Paula vai, ou Ricardo e Quincas vão.
   l) Se Paula for, então Ricardo e Quincas irão.
   m) Paula não irá, mas Ricardo e Quincas irão.
   n) Se Ricardo for, então se Paula não for, Quincas irá.
   o) Se nem Ricardo nem Quincas forem, então Paula irá.
   p) Ricardo irá, somente se Paula e Quincas não forem.
   q) Se Ricardo ou Quincas forem, então Paula irá e Sara não irá.
   r) Ricardo e Quincas irão se e somente se Paula ou Sara for.
   s) Se Sara for, então Ricardo ou Paula irão, e se Sara não for, então Paula e Quincas irão.
   t) Paula irá a festa, a menos que Quincas vá.

3. Escreva as sentenças a seguir utilizando a linguagem da Lógica Proposicional e monte as tabelas verdade correspondentes.

   a) José virá à festa e Maria não gostará ou José não virá à festa e Maria gostará da festa.
   b) A novela será exibida, a menos que seja exibido o programa político.
   c) Se chover irei para casa, caso contrário, ficarei no escritório.
   d) Irei ao teatro somente se for uma peça de comédia.
   e) Se minha namorada vier, irei ao teatro somente se for uma peça de comédia.

4. Demonstre, utilizando o método da refutação, que as fórmulas a seguir são tautologias.

   a) $P \leftrightarrow \neg\neg P$
   b) $(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$
   c) $(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P)$
   d) $(\neg P \vee Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)$
   e) $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow \neg Q) \rightarrow \neg P)$
   f) $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow R)$
   g) $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$
   h) $(P \rightarrow R) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow R))$
   i) $(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$
   j) $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$

5. Demonstre, utilizando o método da refutação, que as fórmulas a seguir são contraditórias.

   a) $\neg((P \wedge Q) \rightarrow Q)$
   b) $P \wedge (Q \wedge \neg P)$
   c) $(P \wedge Q) \wedge \neg P$
   d) $(P \rightarrow (Q \wedge \neg Q)) \wedge P$
   e) $\neg((P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow \neg Q) \rightarrow \neg P))$
   f) $\neg(P \wedge (Q \wedge \neg P)) \rightarrow ((P \wedge Q) \wedge \neg P)$

6. Determine, utilizando o método da refutação, se as fórmulas a seguir são tautologias, contraditórias ou satisfatíveis. Para as fórmulas satisfatíveis, indique interpretações (I) das fórmulas atômicas (símbolos proposicionais) para as quais as fórmulas são verdadeiras e para as quais as fórmulas são falsas.

   a) $\neg(P \wedge \neg Q)$
   b) $(\neg P \vee \neg Q) \leftrightarrow \neg R$
   c) $(\neg P \vee \neg Q) \leftrightarrow \neg P$
   d) $\neg((P \rightarrow Q) \wedge (P \vee \neg R))$
   e) $((P \vee Q) \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow P$
   f) $((P \vee (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow Q) \wedge \neg R$
   g) $((P \rightarrow \neg P) \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow \neg\neg P)$
   h) $(P \wedge (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$
   i) $P_1 \rightarrow ((P_2 \wedge P_3) \rightarrow ((P_4 \wedge P_5) \rightarrow ((P_6 \wedge P_7) \rightarrow P_8)))$

7. Sejam α e β as fórmulas indicadas a seguir. Identifique, justificando sua resposta, os casos em que α implica logicamente em β ($\alpha \models \beta$).

	α	β
a)	$P \vee Q$	P
b)	$P \vee \neg Q$	P
c)	$P \vee \neg Q$	$\perp$
d)	$\perp$	P
e)	P	$\top$
f)	$(P \to Q) \wedge (Q \to R)$	$P \to R$
g)	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	P
h)	$(P \to Q) \wedge \neg Q$	$\neg P$
i)	$(P \to Q) \wedge \neg Q$	P
j)	$(P \to Q) \wedge \neg P$	Q
k)	$(P \to Q) \wedge \neg P$	$\neg Q$
l)	$\neg(P \to Q) \wedge \neg P$	Q
m)	$\neg(P \to Q) \wedge \neg P$	R
n)	P	$\neg\neg P$
o)	P	$P \vee Q$
p)	P	$P \vee (Q \wedge S \to R \vee T)$
q)	$P \wedge (P \to Q)$	Q
r)	$\top$	$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$

8. Considerando as fórmulas α_1, ..., α_9, que são formadas pelos símbolos proposicionais P e Q e possuem a seguinte tabela verdade

P	Q	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9
v	v	v	v	v	v	f	v	f	v	f
v	f	v	v	v	f	v	v	f	f	v
f	v	v	v	f	v	v	f	v	f	v
f	f	v	f	v	v	v	f	v	v	f

a) Identifique os valores de i ($0 < i < 10$) tais que α_i implica em α_j ($0 < j \leq 10$).

b) Identifique os valores de i tais que α_i **não** implica em α_j.

c) Identifique os valores de i, j e k, diferentes entre si, tais que α_i implica em α_j que implica em α_k. Certifique-se que α_i implica em α_k.

d) Existem valores de i e j diferentes entre si, tais que α_i implica em α_j e α_j implica em α_i? Como deve ser a relação entre as colunas de α_i e α_j para que essas relações de implicação ocorram?

e) Existem valores de i e j diferentes entre si, tais que α_i implica em α_j e α_j não implica em α_i

f) O conjunto de fórmulas $\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ é satisfatível?

g) Qual o maior conjunto de fórmulas α que é satisfatível?

h) Identifique as fórmulas que são tautologias, contradições e satisfatíveis.

i) Construa as fórmulas α_i a partir dos símbolos proposicionais P e Q.

[exercício de [Souza, 2002, p. 41]]

9. Considerando a seguinte teoria (uma conjunção de fórmulas)

$$crianca \vee jovem \vee adulto \vee idoso$$
$$trabalhador \vee estudante \vee aposentado$$
$$jovem \to trabalhador \vee estudante$$
$$\neg(crianca \wedge aposentado)$$
$$\neg(crianca \wedge trabalhador)$$

Verificar quais das seguintes fórmulas são implicação lógica dessa teoria:

a) $aposentado \wedge \neg jovem \to adulto \vee idoso$

b) $crianca \to \neg jovem$

c) $crianca \to estudante$

d) $aposentado \vee jovem$

[exercício de [da Silva et al., 2006, p. 28]]

10. Verifique se os seguintes argumentos são válidos justificando sua resposta com provas por dedução natural.

a) $\neg P \to (Q \to R), \neg P, Q \vdash R$

b) $\neg P \to \neg\neg Q, \neg\neg\neg P \vdash Q$

c) $P \to (Q \wedge R), P \vdash P \wedge Q$

d) $P, \neg\neg(P \to Q) \vdash (R \wedge S) \vee Q$

e) $(P \vee Q) \wedge (P \vee R), P \to S, Q \to S, P \to T, R \to T \vdash S \wedge T$

f) $P \to Q, (P \to Q) \to (Q \to P) \vdash P \leftrightarrow Q$

g) $P \to Q, \neg Q \vdash \neg P$ (sem usar MT)

h) $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$

i) $P \to (Q \vee R), Q \to \neg S, R \to \neg S \vdash P \to \neg S$

j) $(P \to R) \wedge (Q \to R) \vdash (P \vee Q) \to R$

k) $P \to (Q \wedge S) \vdash (P \to Q) \wedge (P \to S)$

l) $P \leftrightarrow Q, Q \leftrightarrow R \vdash P \leftrightarrow R$

m) $P \to Q \vdash (Q \to R) \to (P \to R)$

n) $P \vdash \neg\neg P$ (sem usar E$\neg\neg$)

o) $P \vee (Q \wedge R) \vdash (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

p) $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vdash P$

[exercício de [Newton-Smith, 1998, várias páginas do cap. 3]]

Referências

[da Silva et al., 2006] da Silva, F. S. C., Finger, M., and Vieira, A. C. (2006). *Lógica para Computação*. Thomson.

[Newton-Smith, 1998] Newton-Smith, W. H. (1998). *Lógica: um curso introdutório*. Gradiva, Lisboa.

[Souza, 2002] Souza, J. N. d. (2002). *Lógica para Ciência da Computação*. Campus.