Lista de exercícios: **Lógica de Predicados**

1. Formalize os seguintes enunciados interpretando as constantes b e c como os nomes "Bob" e "Cathy"; os predicados unários $\mathtt{m}, \mathtt{e}$ como "é mecânico" e "é enfermeira"; e os predicados binários $\mathtt{l}, \mathtt{t}$ como "ama" e "é mais alto que".

   a) Cathy é mecânica.
   b) Cathy e Bob são mecânicos.
   c) Ou Cathy ou Bob são mecânicos.
   d) Cathy é mecânica ou enfermeira (ou ambos).
   e) Se Cathy é mecânica então ela não é enfermeira.
   f) Cathy é mais alta que Bob.
   g) Bob ama Cathy.
   h) Bob ama a si próprio.
   i) Bob ama qualquer pessoa.
   j) Qualquer pessoa ama Bob.
   k) Qualquer pessoa ama a si mesma.
   l) Existe alguém que Cathy não ama.
   m) Existe alguém que tanto Bob como Cathy amam.
   n) Existe alguém que Bob ama e alguém que Cathy ama.
   o) Todo mundo ama todo mundo.
   p) Se Bob ama a si próprio, então ele ama alguma pessoa.
   q) Se Bob não ama a si próprio, então ele ama ninguém.

   [exercício de [Nold and Rohatyn, 1991, p. 245]]

2. Considerando que o universo de discurso das fórmulas abaixo é um conjunto de 10 pessoas, preencha na segunda coluna a quantidade de pessoas que podem ser bonitas caso a fórmula da primeira coluna seja verdadeira.

Fórmula	*Qtd pessoas bonitas*
$\forall_x\ \mathtt{bonito}(x)$	
$\forall_x\ \neg\mathtt{bonito}(x)$	
$\exists_x\ \mathtt{bonito}(x)$	
$\exists_x\ \neg\mathtt{bonito}(x)$	
$\neg\exists_x\ \mathtt{bonito}(x)$	
$\neg\forall_x\ \mathtt{bonito}(x)$	

3. Formalize as seguintes frases interpretando o predicado $\mathtt{c}$ como "está chovendo" e os predicados unários $\mathtt{r}, \mathtt{g}, \mathtt{s}$ como sendo respectivamente "é uma rã", "é verde" e "é saltitante".

   a) Todas as rãs são verdes.
   b) Nenhuma rã é verde.
   c) Algumas rãs são verdes.
   d) Algumas rãs não são verdes.
   e) Toda coisa é uma rã.
   f) Alguma coisa é uma rã.
   g) Nem toda coisa é uma rã.
   h) Existem rãs verdes.
   i) Qualquer coisa é uma rã verde.
   j) Está chovendo e algumas rãs estão saltitantes.
   k) Se está chovendo, então todas as rãs estão saltitantes.
   l) Algumas coisas são verdes e algumas não são.
   m) Qualquer coisa ou é uma rã ou não é uma rã.
   n) Somente rãs são verdes.
   o) Todas as rãs verdes estão saltitando.
   p) Se nada é verde, então não existem rãs verdes.

   [exercício de [Nold and Rohatyn, 1991, p. 242]]

4. Considerando o exemplo do Wumpus World visto em sala, escreva fórmulas em lógica de predicado que represente as seguintes regras:

   a) Se tem fedor em uma posição, as posições ao lado podem ter o Wumpus.
   b) Se não tem fedor em uma posição, as posições ao lado não têm o Wumpus.
   c) Se tem brisa em uma posição, as posições ao lado podem ter um precipício.
   d) Se não tem brisa em uma posição, as posições ao lado não têm precipício.

5. As fórmulas $(\forall_x\ \mathtt{f}(x)) \rightarrow (\forall_x\ \mathtt{g}(x))$ e $(\forall_x\ \mathtt{f}(x) \rightarrow \mathtt{g}(x))$ são equivalentes? Demonstre que não são equivalentes criando um modelo que satisfaz uma das fórmulas e não satisfaz a outra.

6. Considerando as fórmulas

   a) $\forall x\ \mathtt{f}(x) \rightarrow \mathtt{h}(x)$
   b) $\forall x\ \mathtt{f}(x) \wedge \mathtt{h}(x)$
   c) $\exists x\ \mathtt{f}(x) \rightarrow \mathtt{h}(x)$
   d) $\exists x\ \mathtt{f}(x) \wedge \mathtt{h}(x)$
   e) $\forall x\ \mathtt{f}(x) \leftrightarrow \mathtt{h}(x)$

f) $\neg(\forall x\ \mathtt{f}(x) \rightarrow \mathtt{h}(x))$
g) $(\forall x\ \mathtt{f}(x)) \rightarrow (\forall x\ \mathtt{h}(x))$

e os modelos abaixo para as relações f e h (o universo é formado por a e b), indique que fórumas são satisfeitas por quais modelos.

modelos		fórmulas					
f	h	a)	b)	c)	d)	f)	g)
$\{\}$	$\{\}$						
$\{(a)\}$	$\{\}$						
$\{(a),(b)\}$	$\{\}$						
$\{(a),(b)\}$	$\{(a)\}$						
$\{(a)\}$	$\{(a)\}$						
$\{(a),(b)\}$	$\{(a),(b)\}$						

7. Dada a seguinte fórmula $\forall_x\ \exists_y\ \mathtt{ama}(x,y)$ qual das seguintes sentenças em linguagem natural ela representa, considerando que $\mathtt{ama}(x,y)$ representa que x ama y?

   a) Alguém ama a todos.
   b) Todos amam alguém.
   c) Ninguém ama a todos.
   d) Há alguém que todos amam.
   e) Nenhuma das anteriores.

   [questão do PosComp]

8. Indique as propriedades das relações abaixo:

   a) Ser mais gordo (universo = todas as pessoas).
   b) Ser irmão (universo = todas as pessoas).
   c) Ser pai (universo = todas as pessoas).
   d) Ter o mesmo caráter (universo = todas as pessoas).
   e) = (universo = números naturais).
   f) $\geq$ (universo = números naturais).
   g) Ter estrada (universo = cidades).
   h) Ser múltiplo (universo = $\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$).

9. Identifique os erros das seguintes provas:

   a)

1	$\forall_x\forall_y\ \mathtt{gosta}(x,y) \rightarrow \mathtt{bonito}(y)$	
2	$\mathtt{gosta}(b,a)$	
3	$\mathtt{gosta}(b,a) \rightarrow \mathtt{bonito}(b)$	$E\forall[x/b,y/a]$, 1
4	$\mathtt{bonito}(b)$	$E \rightarrow$, 2, 3

   b)

1	$\forall_x\forall_y\ \mathtt{gos}(x,y) \wedge \mathtt{rico}(y) \rightarrow \mathtt{gan}(x)$	
2	$\forall_x\ \mathtt{rico(x)}$	
3	$\mathtt{gos}(b,a) \wedge \mathtt{rico}(a) \rightarrow \mathtt{gan}(b)$	$E\forall[x/b,y/a]$, 1
4	$\mathtt{rico}(a) \rightarrow \mathtt{gan}(b)$	$E\wedge$, 3
5	$\mathtt{rico}(a)$	$E\forall[x/a]$, 2
6	$\mathtt{gan}(b)$	$E \rightarrow$, 5, 4

10. Considerando as seguintes constantes:
    a: Alice; b: Beto

    o seguinte predicado 0-ário: c: chove

    os seguintes predicados unários:

    - fam: famoso
    - hum: humano

    e o seguinte predicado binário:

    - gosta: ... gosta de ...

    construa uma prova para cada um dos seguintes argumentos:

    a) $\forall_x\ \mathtt{fam}(x) \vdash \mathtt{fam}(a) \wedge (\mathtt{fam}(b) \wedge (\mathtt{fam}(c) \wedge \mathtt{fam}(d)))$
    b) $\forall_x\ \mathtt{fam}(x) \vee \mathtt{hum}(x), \neg\mathtt{fam}(a) \vdash \mathtt{hum}(a)$
    c) $\neg\mathtt{fam}(a) \vdash \neg\forall_x\ \mathtt{fam}(x) \wedge \mathtt{hum}(x)$
    d) $\forall_x\ \mathtt{fam}(x) \leftrightarrow \mathtt{c}, \mathtt{c} \vdash \mathtt{fam}(a)$
    e) $\forall_x\ \neg\mathtt{fam}(x) \vee \neg\mathtt{hum}(x) \vdash \neg(\mathtt{fam}(a) \wedge \mathtt{hum}(a))$
    f) $\forall_x\ \mathtt{fam}(x) \rightarrow \mathtt{hum}(x) \vdash \forall_x\ \neg\mathtt{hum}(x) \rightarrow \neg\mathtt{fam}(x)$
    g) $\forall_x\ \mathtt{fam}(x) \rightarrow \mathtt{hum}(x) \vdash (\forall_x\ \neg\mathtt{hum}(x)) \rightarrow (\forall_x\ \neg\mathtt{fam}(x))$
    h) $\forall_x\forall_y\ \mathtt{gosta}(x,y) \vdash \forall_x\ \mathtt{gosta}(x,x)$
    i) $\forall_x\ \mathtt{fam}(x) \vdash (\forall_x\ \mathtt{hum}(x)) \rightarrow (\forall_x\ \mathtt{fam}(x) \wedge \mathtt{hum}(x))$
    j) $\forall_x\forall_y\ \mathtt{gosta}(x,y) \rightarrow \neg\mathtt{gosta}(y,x) \vdash \forall_x\neg\mathtt{gosta}(x,x)$
    k) $\forall_x\ \mathtt{fam}(x) \vdash \exists_x\ \mathtt{fam}(x)$
    l) $\neg\exists_x\ \mathtt{fam}(x) \vdash \neg\mathtt{fam}(a)$
    m) $\exists_x\ \neg\mathtt{fam}(x) \vdash \neg\forall_x\ \mathtt{fam}(x)$
    n) $\exists_x\ \mathtt{h}(x), \forall_x\ \mathtt{h}(x) \rightarrow \mathtt{g}(x) \vdash \exists_x\ \mathtt{g}(x)$

    [exercício de [Nold and Rohatyn, 1991, p. 326]]

11. Sobre as propriedades das relação prove que

    (a) toda relação intransitiva também é irreflexiva;
    (b) toda relação irreflexiva e transitiva também é assimétrica;
    (c) nenhuma relação pode ser assimétrica e reflexiva.

Referências

[Nold and Rohatyn, 1991] Nold, J. and Rohatyn, D. (1991). *Lógica*. McGraw-Hill, São Paulo.